MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudeţean de Matematică al Şcolii gimnaziale nr. 56
Ediţia a XIII - a, 25.01.2014

Soluţii şi bareme clasa a VIII - a

1.	Egalitatea din enunţ se scrie $(a+b-c)(a+b+c)=9$, unde $a+b+c$ şi $a+b-c$ sunt numere naturale.	**2p**
	Se analizează cazurile $a+b-c\in\{1,3\}$.	**1p**
	Se obţin 6 triplete cu $c=4$ şi 4 triplete cu $c=0$	**4p**
2.	**a)** Se consideră planul α, paralel cu dreapta *e* care conţine dreapta *f*. Atunci punctele *A*, *B* şi *M* sunt la distanţa *d* de planul α. Fie *x*, *z* şi *y* distanţele de la proiecţiile pe α ale punctelor *A*, *B* şi *M* la dreapta *f*.	**1p**
	Obţinem $m^2=d^2+z^2=d^2+\left(\frac{x\pm y}{2}\right)^2<d^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, iar	**1p**
	$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{d^2+x^2+d^2+y^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2}+d^2$	**1p**
	Finalizare	**2p**
	b) Dreapta *e* se proiectează pe *f* intr-un punct *C*. Cum, de exemplu, $a<b$, rezultă că $a<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<b$, deci există $N\in(AB)$ astfel încât $a<CN<b$.	**2p**
3.	Avem: $2a^2-pa+3p+1=0$ şi $3a^2-3aq+5q-1=0$	**1p**
	Înmulţim prima relaţie cu 3 şi a a doua cu 2, apoi le scădem membru cu membru şi, grupând convenabil, obţinem: $3a(2q-p)+9p-10q+5=0$.	**2p**
	Cum *a* este iraţional, rezultă $p-2q=0$ şi $9p-10q+5=0$, de unde $p=-\frac{5}{4}$ şi $q=-\frac{5}{8}$.	**2p**
	Avem ecuaţia $a^2+\frac{5}{8}a-\frac{11}{8}=0$, sau $\left(a+\frac{5}{16}\right)^2=\frac{377}{256}$. Finalizare	**2p**
4.	Scriind puterea punctelor *B* şi *C* faţă de cercul (ADM), obţinem $BP\cdot BA=BD\cdot BM$, de unde $BP=\frac{BD\cdot BP}{BA}$. (1) $CQ\cdot CA=CM\cdot CD$, de unde $CQ=\frac{CM\cdot CD}{CA}$.(2)	**4p**
	Din (1) şi (2), pe baza teoremei bisectoarei rezultă concluzia.	**3p**